Ueber die Darstellung

der

Wurzeln einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung durch unendliche Reihen.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

am 4. Mai 1878

VON

Hans von Mangoldt

aus Freiburg in Baden.

ACAD. LAND. BAT. BIBL.

OPPONENTEN:

Herr Dr. Georg Hettner,
„ Dr. James Moser,
„ Stud. math. Friedrich Schur.

BERLIN.

BUCHDRUCKEREI VON GUSTAV SCHADE (OTTO FRANCKE).

Linienstr. 158.

Im zweiten Theil der Gauss'schen Abhandlung „Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen“ (Gauss Werke, herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. III.), in dem eine zur numerischen Berechnung der reellen Wurzeln einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung beliebigen Grades dienende Methode entwickelt wird, findet sich in der Einleitung folgende Bemerkung:

„In der That lässt sich jede, gleichviel ob reelle oder imaginäre, Wurzel einer Gleichung mit drei Gliedern durch eine convergente Reihe von einfachem Fortschreitungsgesetz ausdrücken. Ich werde jedoch diese Auflösungsart aus mehreren Gründen von meiner gegenwärtigen Betrachtung ganz ausschliessen, und bemerke hier nur, dass der Grad der Convergenz von dem gegenseitigen Verhalten der Coefficienten abhängig, dass sie desto langsamer ist, je näher dies Verhalten demjenigen kommt, bei welchem die Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, und dass in diesem Grenzfalle selbst sie schwächer ist, als bei irgend welcher fallenden geometrischen Progression.“

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, das hier von Gauss angedeutete auszuführen. Dabei werden sich die von ihm aufgestellten Behauptungen in ihrem vollen Umfange bestätigen.

1.

Es seien m und n zwei beliebige ganze positive Zahlen, und es werde durch die trinomische Gleichung

$$1) \qquad x^{m+n} + f x^n - g = 0$$

die Grösse x als eine algebraische Function der beiden Veränderlichen f und g definirt.

Wir nehmen zunächst an, g sei von Null verschieden. Dann können wir die gegebene Gleichung durch die Substitution

$$x = g^{\frac{1}{m+n}} v,$$

wo $g^{\frac{1}{m+n}}$ einen beliebigen der möglichen Werthe und v eine neue Variabele bedeutet, auf die Form bringen

$$g v^{m+n} + f g^{\frac{n}{m+n}} v^n - g = 0,$$

oder

$$2) \qquad v^{m+n} + f g^{-\frac{m}{m+n}} v^n - 1 = 0,$$

wobei unter $g^{-\frac{m}{m+n}}$ die $-m$te Potenz des für $g^{\frac{1}{m+n}}$ gewählten Werthes zu verstehen ist. Nun setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{m+n} \cdot f g^{-\frac{m}{m+n}} = t.$$

Dann geht die vorstehende Gleichung in eine andere über:

$$3) \qquad v^{m+n} + (m+n) t v^n - 1 = 0,$$

in welcher nur noch eine unabhängige Veränderliche t vorkommt.

Die Wurzeln der Gleichung

$$v^{m+n} - 1 = 0,$$

welche man hieraus erhält, indem man $t = 0$ setzt, sind sämmtlich von einander verschieden. Daher lassen sich die $m + n$ Wurzeln v der Gleichung 3) für alle in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes gelegenen Werthe von t durch eben so viel von einander verschiedene nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreitende Reihen darstellen. Wir wollen zunächst nur diejenige Wurzel der Gleichung 3), welche für $t = 0$ den Werth 1 erwirbt, nach Potenzen von t entwickeln. Es wird sich später zeigen, dass dies die einzige Reihenentwicklung ist, die wir überhaupt vorzunehmen haben, da mit Hülfe der Reihe, die wir erhalten werden, nicht nur die übrigen Wurzeln der Gleichung 3), sondern auch sämmtliche Wurzeln der ursprünglichen Gleichung 1) bei beliebigen Werthen von f und g ausgedrückt werden können.

Wir setzen nun

$$v = 1 + w$$

und können dann die Aufgabe, welche wir uns stellen, auch folgendermassen fassen:

Diejenige Wurzel w der Gleichung

$$4) \qquad (1+w)^{m+n} + (m+n)\, t\, (1+w)^n - 1 = 0,$$

oder

$$e^{(m+n)\log(1+w)} + (m+n)\, t\, e^{n\log(1+w)} - 1 = 0,$$

welche gleichzeitig mit t verschwindet, nach ganzen positiven Potenzen von t zu entwickeln.

In dieser Form hat die Aufgabe einen Sinn, nicht nur wenn m und n, wie bisher, ganze positive Zahlen, sondern auch, wenn sie beliebige complexe Grössen bezeichnen. Man muss nur $m + n$ von Null verschieden annehmen und bestimmen, dass $(1+w)^{m+n}$ und $(1+w)^n$ die Entwickelungen nach dem binomischen Lehrsatz bedeuten sollen; denn versteht man unter m und n irgend zwei Grössen, deren Summe von Null verschieden ist, ferner unter w eine beliebige Grösse, deren absoluter Betrag < 1 ist, und setzt in Gleichung 4) für $(1+w)^{m+n}$ und $(1+w)^n$ die Entwickelungen nach dem binomischen Lehrsatz ein, so verwandelt sich deren linke Seite in eine convergirende Potenzreihe von w und t, ohne constantes Glied. Der Coefficient von w^1 wird gleich $m + n$, also von Null verschieden. Durch die Forderung, dass die Summe der Reihe Null sein und w gleichzeitig mit t verschwinden soll, wird daher w als eine analytische Function von t definirt, welche für alle Werthe von t, deren absoluter Betrag unterhalb einer gewissen Grenze liegt, eindeutig ist, und in eine convergente nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreitende Reihe entwickelt werden kann.

Da durch die angegebene Erweiterung unseres Problems keine wesentlichen Complicationen entstehen, so beschäftigen wir uns gleich mit der allgemeineren Aufgabe:

Unter der Voraussetzung, dass m und n beliebige complexe Grössen sind, deren Summe von Null verschieden ist, und dass $(1 + w)^{m+n}$ und $(1 + w)^n$ die durch Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatz entstehenden Potenzreihen von w bedeuten, die Wurzel w der Gleichung 4), welche mit t gleichzeitig verschwindet, in eine Potenzreihe von t zu entwickeln.

2.

Durch vollständige Differentiation der Gleichung 4) nach t ergiebt sich

$$(m + n)\,(1 + w)^{m+n-1}\frac{dw}{dt} + (m + n)\,.\,n\,.\,(1 + w)^{n-1}\frac{dw}{dt}\,t + (m + n)\,(1 + w)^n = 0,$$

oder

$$5) \qquad (1 + w)^m \frac{dw}{dt} + nt\frac{dw}{dt} + 1 + w = 0,$$

eine Gleichung, der man, vorausgesetzt, dass $m + 1$ nicht Null ist, auch die Form geben kann

$$6) \qquad \frac{1}{m + 1}\frac{d}{dt}(1 + w)^{m+1} + nt\frac{dw}{dt} + 1 + w = 0.$$

Aus dieser Gleichung kann eine Recursionsformel zur Berechnung der Coefficienten der Entwickelung von w nach Potenzen von t hergeleitet werden. Sei zu dem Ende

$$7) \qquad w = \sum_{s=1}^{\infty} b_s\, t^s,$$

wo b_1, b_2 ... die zu bestimmenden Coefficienten bedeuten. Man hat dann, wenn $\varkappa$ eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet:

$$8) \qquad w^\varkappa = \sum_{i=\varkappa}^{\infty} t^i\, {}^i\mathrm{C}_p^\varkappa,$$

wo ${}^i\mathrm{C}_p^\varkappa$ die Summe der mit ihren Permutationszahlen multiplicirten Combinationen der $\varkappa$ten Classe zur Summe i aus den beliebig oft wiederholbaren Elementen b_1, b_2 ... bezeichnet.

Ferner ist

$$(1 + w)^{m+1} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\binom{m+1}{\varkappa} w^\varkappa$$

und in Folge von 8)

$$(1 + w)^{m+1} = 1 + \sum_{\varkappa=1}^{\infty}\sum_{i=\varkappa}^{\infty}\binom{m+1}{\varkappa} t^i\, {}^i\mathrm{C}_p^\varkappa,$$

$$9) \qquad = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} t^i \sum_{\varkappa=1}^{i}\binom{m+1}{\varkappa}\, {}^i\mathrm{C}_p^\varkappa.$$

Indem man diese Entwickelung und die Reihe 7) in Gleichung 6) einführt, und die Coefficienten der successiven Potenzen von t gleich Null setzt, erhält man zunächst

$$b_1 = -1$$

und dann zur Bestimmung der übrigen Coefficienten b folgende Recursionsformel:

10) $$\frac{i+1}{m+1}\sum_{\varkappa=1}^{i+1}\binom{m+1}{\varkappa}^{i+1}C_p^{\varkappa} + ni\,b_i + b_i = 0 \quad \text{für } i \geqq 1.$$

Nun ist, welches auch die Bedeutung der Grössen $b_1, b_2 \ldots$ sein möge, folgende Gleichung eine Identität:

11) $$\sum_{\varkappa=1}^{i+1}\binom{m+2}{\varkappa}^{i+1}C_p^{\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{i+1}\binom{m+1}{\varkappa}^{i+1}C_p^{\varkappa} + b_1\sum_{\varkappa=1}^{i}\binom{m+1}{\varkappa}^{i}C_p^{\varkappa}$$
$$+ b_2\sum_{\varkappa=1}^{i-1}\binom{m+1}{\varkappa}^{i-1}C_p^{\varkappa} + \ldots + b_i\sum_{\varkappa=1}^{1}\binom{m+1}{\varkappa}^{1}C_p^{\varkappa} + b_{i+1}.$$

Zunächst sieht man nämlich, dass b_{i+1} auf beiden Seiten mit demselben Coefficienten multiplicirt ist. Ferner ist, wenn $\varkappa$ eine beliebige ganze positive Zahl > 1 und $\leqq i+1$ bezeichnet, die allgemeinste Form einer Combination der $\varkappa$ten Classe zur Summe $i+1$ aus den gegebenen Elementen diese:

$$b_{\mu_1}^{\lambda_1}\, b_{\mu_2}^{\lambda_2} \ldots b_{\mu_r}^{\lambda_r},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$; $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_r$ ganze positive Zahlen $\geqq 1$ bedeuten, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_r < i+1,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_r = \varkappa,$$
$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_r\mu_r = i+1.$$

Diese Combination hat aber auf der linken Seite der Gleichung 11) den Coefficienten

$$\binom{m+2}{\varkappa}\frac{\varkappa!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_r!}$$

und auf der rechten Seite den folgenden:

$$\binom{m+1}{\varkappa}\frac{\varkappa!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_r!} + \binom{m+1}{\varkappa-1}\frac{(\varkappa-1)!}{(\lambda_1-1)!\,\lambda_2!\ldots\lambda_r!} + \binom{m+1}{\varkappa-1}\frac{(\varkappa-1)!}{\lambda_1!\,(\lambda_2-1)!\ldots\lambda_r!} + \ldots.$$
$$+ \binom{m+1}{\varkappa-1}\frac{(\varkappa-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots(\lambda_r-1)!} = \frac{(m+1).m.(m-1)\ldots(m-\varkappa+3)}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_r!}(m-\varkappa+2+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_r)$$
$$= \binom{m+2}{\varkappa}\frac{\varkappa!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_r!},$$

so dass Gleichung 11) in der That bei beliebigen Werthen der b identisch erfüllt wird.

Aehnlich ergiebt sich die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$\sum_{x=1}^{i+1}\binom{m+2}{x}{}^{i+1}C_p^x = \frac{m+2}{i+1}\left\{b_1\sum_{x=1}^{i}\binom{m+1}{x}{}^{i}C_p^x + 2b_2\sum_{x=1}^{i-1}\binom{m+1}{x}{}^{i-1}C_p^x + \ldots\right.$$

12)

$$\left. + ib_i\sum_{x=1}^{1}\binom{m+1}{x}{}^{1}C_p^x + (i+1)b_{i+1}\right\},$$

denn der Coefficient von b_{i+1} ist wieder beiderseits derselbe, und die Combination

$$b_{\mu_1}^{\lambda_1}\, b_{\mu_2}^{\lambda_2}\ldots b_{\mu_r}^{\lambda_r}$$

hat links den Coefficienten

$$\binom{m+2}{x}\frac{x!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_r!}$$

und rechts den folgenden:

$$\frac{m+2}{i+1}\left\{\mu_1\binom{m+1}{x-1}\frac{(x-1)!}{(\lambda_1-1)!\,\lambda_2!\ldots\lambda_r!} + \mu_2\binom{m+1}{x-1}\frac{(x-1)!}{\lambda_1!\,(\lambda_2-1)!\ldots\lambda_r!} + \ldots + \mu_r\binom{m+1}{x-1}\frac{(x-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots(\lambda_r-1)!}\right\}$$

$$= \frac{m+2}{i+1}\binom{m+1}{x-1}\frac{(x-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_r!}(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_r\mu_r) = \binom{m+2}{x}\frac{x!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_r!}.$$

Indem man Gleichung 11) von 12) abzieht, erhält man

$$\sum_{x=1}^{i+1}\binom{m+1}{x}{}^{i+1}C_p^x = \frac{1}{i+1}\sum_{\lambda=1}^{i}\left\{b_\lambda(\lambda m + 2\lambda - i - 1)\sum_{x=1}^{i+1-\lambda}\binom{m+1}{x}{}^{i+1-\lambda}C_p^x\right\} + (m+1)\,b_{i+1}.$$

Diesen Werth setzen wir in die Recursionsformel 10) ein und erhalten dadurch

13) $$(i+1)\,b_{i+1} = -\,b_i\,(ni+1) - \frac{1}{m+1}\sum_{\lambda=1}^{i}\left\{b_\lambda(\lambda m + 2\lambda - i - 1)\sum_{x=1}^{i+1-\lambda}\binom{m+1}{x}{}^{i+1-\lambda}C_p^x\right\}.$$

Nun ist für $\lambda < i$ wieder nach Gleichung 10)

$$\frac{1}{m+1}\sum_{x=1}^{i+1-\lambda}\binom{m+1}{x}{}^{i+1-\lambda}C_p^x = -\frac{1}{i-\lambda+1}\,b_{i-\lambda}\,(ni - n\lambda + 1),$$

und für $\lambda = i$

$$\frac{1}{m+1}\sum_{x=1}^{1}\binom{m+1}{x}{}^{1}C_p^x = b_1 = -1.$$

Durch Benutzung dieser beiden Gleichungen vereinfacht sich die Formel 13) und nimmt folgende Gestalt an:

14) $$(i+1)\,b_{i+1} = b_i\,[i(m-n+1) - 2] + \sum_{\lambda=1}^{i-1}\frac{(\lambda m + 2\lambda - i - 1)(ni - n\lambda + 1)}{i-\lambda+1}\,b_\lambda\,b_{i-\lambda}.$$

Man kann dieser Gleichung eine mehr symmetrische Form geben, indem man λ mit $i-\lambda$ vertauscht und die so entstehende Gleichung addirt. So ergiebt sich

15)
$$(i+1)\,b_{i+1} = b_i\,[i\,(m-n+1)-2]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{i-1}\frac{b_\lambda\,b_{i-\lambda}}{(\lambda+1)\,(i-\lambda+1)}\left\{mn\lambda(i-\lambda)(i+2)+(m-n)\left[(i-\lambda)^2+\lambda^2+i\right]-4\lambda(i-\lambda)+i^2-i-2\right\}.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich für die ersten Coefficienten b successive folgende Werthe:

$$b_1 = -1$$
$$b_2 = -\frac{1}{2}(m-n-1)$$

16)
$$b_3 = -\frac{1}{3!}(2m^2-5mn+2n^2-3m+3n+1)$$
$$b_4 = -\frac{1}{4!}(6m^3-26m^2n+26mn^2-6n^3-11m^2+26mn-11n^2+6m-6n-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Diese Grössen sind ganze Functionen von m und n, welche sich nicht ändern, wenn man m mit $-n$ und n mit $-m$ vertauscht. Dies gilt ganz allgemein. Aus den entwickelten Ausdrücken von b_1, b_2, b_3, b_4 und der Recursionsformel 15) leitet man sogleich folgendes Resultat ab:

Der Coefficient b_{i+1}, wo i eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, ist eine ganze Function von m und n, welche sich nicht ändert, wenn man m mit $-n$, n mit $-m$ vertauscht. Diese ganze Function ist von der $i$ten Dimension und auch in Bezug auf jede der Grössen m, n vom $i$ten Grade.

Indem man in Gleichung 14)

$$\frac{\lambda m+2\lambda-i-1}{i-\lambda+1} \text{ in } \frac{\lambda\,(m+1)}{i-\lambda+1}-1$$

umformt, erhält man

17)
$$(i+1)\,b_{i+1} = b_i\,[i\,(m-n+1)-2] + (m+1)\sum_{\lambda=1}^{i-1}\frac{\lambda\,(ni-n\lambda+1)}{i-\lambda+1}\,b_\lambda\,b_{i-\lambda}$$
$$-\sum_{\lambda=1}^{i-1}(ni-n\lambda+1)\,b_\lambda\,b_{i-\lambda},$$

oder

$$(i+1)!\,b_{i+1} = i!\,b_i[i(m-n+1)-2]+(m+1)\sum_{\lambda=1}^{i-1}\frac{i!\,(ni-n\lambda+1)}{(\lambda-1)!\,(i-\lambda+1)!}\cdot\lambda!\,b_\lambda\cdot(i-\lambda)!\,b_{i-\lambda}$$
$$-\sum_{\lambda=1}^{i-1}\frac{i!}{\lambda!\,(i-\lambda)!}(ni-n\lambda+1)\cdot\lambda!\,b_\lambda\cdot(i-\lambda)!\,b_{i-\lambda},$$

und erkennt hieraus, dass alle Coefficienten der ganzen Function $(i+1)!\,b_{i+1}$ ganze Zahlen sind.

Wir hatten vorhin den Fall $m = -1$ ausgeschlossen. Es ist aber leicht zu sehen, dass die Formeln 14 — 18 auch für diesen Fall gültig bleiben. Die Gleichung 5) geht nämlich in folgende über:

$$\frac{dw}{dt} + nt(1+w)\frac{dw}{dt} + (1+w)^2 = 0,$$

oder

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{2}nt\frac{d}{dt}\left[(1+w)^2\right] + (1+w)^2 = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung an Stelle von w die Reihe

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} b'_s t^s$$

ein, so erhält man $b'_1 = -1$ und zur Bestimmung der übrigen Coefficienten b' sofort die Recursionsformel

$$(i+1)\,b'_{i+1} + ni\,b'_i + \frac{1}{2}ni\sum_{\lambda=1}^{i-1} b'_\lambda\, b'_{i-\lambda} + 2b'_i + \sum_{\lambda=1}^{i-1} b'_\lambda\, b'_{i-\lambda} = 0,$$

oder

$$(i+1)\,b'_{i+1} = -(ni+2)\,b'_i - \frac{ni+2}{2}\sum_{\lambda=1}^{i-1} b'_\lambda\, b'_{i-\lambda}.$$

Dieselbe Formel erhält man, wenn man in Formel 17) m durch -1, b_λ durch b'_λ ersetzt und berücksichtigt, dass

$$\sum_{\lambda=1}^{i-1}(ni - n\lambda + 1)\,b_\lambda\, b_{i-\lambda} = \frac{ni+2}{2}\sum_{\lambda=1}^{i-1} b_\lambda\, b_{i-\lambda}$$

ist. Daher entstehen in der That die Coefficienten b' aus den Coefficienten b mit gleichem Index, indem man einfach $m = -1$ setzt.

3.

Die durch die Formeln 16) gegebenen Ausdrücke der ersten Coefficienten b lassen noch kein independentes Bildungsgesetz dieser Grössen erkennen. Man kommt jedoch auf ein solches, wenn man versucht, die rechten Seiten der Gleichungen 16) in ihre Primfactoren aufzulösen.

Man erhält nämlich:

19)
$$b_1 = -1,$$
$$b_2 = -\frac{1}{2}(m-n-1),$$
$$b_3 = -\frac{1}{3!}(2m-n-1)(m-2n-1),$$
$$b_4 = -\frac{1}{4!}(3m-n-1)\,2m-2n-1)(m-3n-1),$$
. . . . . .

Diese Formeln im Verein mit den entwickelten allgemeinen Eigenschaften der Coefficienten b geben zu der Vermuthung Anlass, dass allgemein, wenn i eine ganze positive Zahl bedeutet,

20) $$b_i = -\frac{1}{i!}\prod_{\lambda=1}^{i-1}\left[im - 1 - \lambda(m+n)\right]$$

sein werde.

Versucht man nun dieses Resultat aus den gefundenen Recursionsformeln zu beweisen, so stösst man aus dem Grunde auf Schwierigkeiten, weil man a priori keine einfache algebraische Operation angeben kann, mittelst deren man das Product

$$-\frac{1}{i+1}\prod_{\lambda=1}^{i}\left[(i+1)m - 1 - \lambda(m+n)\right]$$

aus den Grössen

$$-\frac{1}{\varkappa!}\prod_{\lambda=1}^{\varkappa-1}\left[\varkappa m - 1 - \lambda(m+n)\right] \quad (\varkappa = 2, 3, \ldots i)$$

ableiten könnte. Wir benutzen daher zum Beweise der Formel 20) ein independentes Verfahren, welches mit den vorstehenden recursorischen Entwickelungen in keinem Zusammenhange steht.

Die Gleichung 4) geht durch die Substitutionen

$$t = \frac{t'}{m+n}; \quad 1 + w = (1 + w')^{\frac{1}{m+n}},$$

wo t' eine nene unabhängige, w' eine neue abhängige Variabele bedeutet, und unter

$$(1 + w')^{\frac{1}{m+n}}$$

die durch Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatz entstehende Reihe zu verstehen ist, über in

$$1 + w' + (1 + w')^{\frac{n}{n+m}}\, t' - 1 = 0.$$

Hieraus folgt

21) $$t' = -\frac{w'}{(1 + w')^{\frac{n}{m+n}}}.$$

Wir bezeichnen nun die rechte Seite dieser Gleichung, welche in eine Potenzreihe von der Form

$$-w' + w'^2\,\mathfrak{P}(w')$$

entwickelt werden kann, zur Abkürzung mit $\varphi(w')$. Diejenige Wurzel w' der Gleichung 21), welche mit t' gleichzeitig verschwindet, wird dann nach einem bekannten Satze dargestellt durch die Reihe

$$w' = \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\left[\varphi(w')^{-\lambda}\right]_{w'^{-1}} t'^{\lambda},$$

wo $\left[\varphi(w')^{-\lambda}\right]_{w'^{-1}}$ den Coefficienten von w'^{-1} in der Entwickelung von $\varphi(w')^{-\lambda}$ bezeichnet.

Noch allgemeiner ist, wenn μ eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet,

$$w'^{\mu} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mu}{\lambda} \left[\varphi\,(w')^{-\lambda}\right]_{w'^{-\mu}} \cdot t'^{\lambda},$$

wo $\left[\varphi\,(w')^{-\lambda}\right]_{w'^{-\mu}}$ den Coefficienten von $w'^{-\mu}$ in der Entwickelung von $\varphi\,(w')^{-\lambda}$ bezeichnet.

Nun ist

$$\left[\varphi\,(w')^{-\lambda}\right]_{w'^{-\mu}} = \left[w'^{\lambda}\,\varphi\,(w')^{-\lambda}\right]_{w'^{\lambda-\mu}} = \frac{(-1)^{\lambda}}{(\lambda-\mu)!}\left[\frac{d^{\lambda-\mu}}{dw'^{\lambda-\mu}}\,(1+w')^{\frac{\lambda n}{m+n}}\right]_{w'=0}$$

$$= \frac{(-1)^{\lambda}}{(\lambda-\mu)!} \cdot \frac{\lambda n}{m+n}\left(\frac{\lambda n}{m+n}-1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\lambda n}{m+n}-\lambda+\mu+1\right)$$

$$= (-1)^{\lambda} \left\{\begin{matrix} \frac{\lambda n}{m+n} \\ \lambda-\mu \end{matrix}\right\},$$

folglich

$$w'^{\mu} = \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} (-1)^{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\lambda} \cdot \left\{\begin{matrix} \frac{\lambda n}{m+n} \\ \lambda-\mu \end{matrix}\right\} t'^{\lambda}.$$

Diese Reihen setzen wir in die Entwickelung

$$1 + w = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{\begin{matrix} \frac{1}{m+n} \\ \mu \end{matrix}\right\} w'^{\mu}$$

ein und erhalten dann, indem wir nach Potenzen von t' ordnen,

$$1 + w = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} t'^{i} \sum_{\mu=1}^{i} \left\{\begin{matrix} \frac{1}{m+n} \\ \mu \end{matrix}\right\} \cdot (-1)^{i} \cdot \frac{\mu}{i} \cdot \left\{\begin{matrix} \frac{in}{m+n} \\ i-\mu \end{matrix}\right\}.$$

Nun ist

$$(-1)^{i} \sum_{\mu=1}^{i} \frac{\mu}{i} \left\{\begin{matrix} \frac{1}{m+n} \\ \mu \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} \frac{in}{m+n} \\ i-\mu \end{matrix}\right\} = \frac{(-1)^{i}}{i\,(m+n)} \cdot \sum_{\mu=1}^{i} \left\{\begin{matrix} \frac{1}{m+n}-1 \\ \mu-1 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} \frac{in}{m+n} \\ i-\mu \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{(-1)^{i}}{i\,(m+n)} \cdot \left\{\begin{matrix} \frac{in+1}{m+n}-1 \\ i-1 \end{matrix}\right\},$$

folglich

$$1 + w = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i}}{i\,(m+n)} \cdot \left\{\begin{matrix} \frac{in+1}{m+n}-1 \\ i-1 \end{matrix}\right\} t'^{i}.$$

Indem wir nun t' durch $(m+n)\,t$ ersetzen, ergiebt sich

$$1 + w = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i}\,\frac{(m+n)^{i-1}}{i} \left\{\begin{matrix} \frac{in+1}{m+n}-1 \\ i-1 \end{matrix}\right\} t^{i},$$

also

$$b_i = (-1)^i \frac{(m+n)^{i-1}}{i} \binom{in+1}{i-1} - 1 = -\frac{1}{i!} \prod_{\lambda=1}^{i-1} [-in - 1 + \lambda (m+n)]$$

22) $$b_i = -\frac{1}{i!} \prod_{\lambda=1}^{i-1} [im - 1 - \lambda (m+n)]$$

übereinstimmend mit Gleichung 20).

4.

Noch einfacher als die Reihe für w gestaltet sich die Entwickelung von $\log (1+w)$ nach Potenzen von t, welche wir jetzt herstellen wollen.

Aus Gleichung 5) folgt

$$\frac{dw}{dt} \left[(1+w)^m + nt\right] = -(1+w),$$

23) $$\frac{d \log (1+w)}{dt} = -\frac{1}{(1+w)^m + nt}.$$

Hieraus ergiebt sich durch nochmalige Differentiation nach t

$$\frac{d^2 \log (1+w)}{dt^2} = \frac{m (1+w)^{m-1} \frac{dw}{dt} + n}{\left[(1+w)^m + nt\right]^2}$$

$$= \left(\frac{d \log (1+w)}{dt}\right)^2 \cdot \left[m (1+w)^m \frac{d \log (1+w)}{dt} + n\right].$$

Nun ist nach 23)

$$(1+w)^m = -nt - \frac{1}{\frac{d \log (1+w)}{dt}},$$

also

$$\frac{d^2 \log (1+w)}{dt^2} = \left(\frac{d \log (1+w)}{dt}\right)^2 \left[-mnt \frac{d \log (1+w)}{dt} - m + n\right],$$

$$-\frac{\frac{d^2 \log (1+w)}{dt^2}}{\left(\frac{d \log (1+w)}{dt}\right)^2} = mnt \frac{d \log (1+w)}{dt} + m - n.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

24) $$\frac{1}{\frac{d \log (1+w)}{dt}} = (m-n)\, t + mn \left[t \log (1+w) - \int \log (1+w)\, dt\right] + C,$$

wo C eine von t unabhängige Constante bedeutet.

Nun sei

$$\log(1+w) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$$

die Entwickelung von $\log(1+w)$ nach Potenzen von t. Ferner werde festgesetzt, dass unter $\int \log(1+w)\,dt$ die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{t^{i+1}}{i+1}$$

verstanden werden soll. Setzt man dann in Gleichung 24)

$$\frac{1}{\frac{d\log(1+w)}{dt}} = -(1+w)^m - nt = -1 + (m-n)\,t + t^2\,\mathfrak{P}(t)$$

ein, so ergiebt sich durch Vergleichung der constanten Glieder auf beiden Seiten

$$C = -1.$$

Indem wir diesen Werth in Gleichung 24) einsetzen und beiderseits mit

$$\frac{d\log(1+w)}{dt}$$

multipliciren, erhalten wir

25)
$$\frac{d\log(1+w)}{dt} = -1 + (m-n)\,t\,\frac{d\log(1+w)}{dt} + m\,.\,n\,[t\log(1+w) - \int \log(1+w)\,dt]\,\frac{d\log(1+w)}{dt}.$$

Aus dieser Gleichung kann nun leicht eine Recursionsformel zur Berechnung der Coefficienten a_i abgeleitet werden. Indem man nämlich beide Seiten nach Potenzen von t entwickelt und die Coefficienten von t^i beiderseits einander gleich setzt, erhält man, da

$$\frac{d\log(1+w)}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} i\,a_i\,t^{i-1},$$

$$t\log(1+w) - \int \log(1+w)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(1 - \frac{1}{i+1}\right) t^{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\,a_i}{i+1}\,t^{i+1},$$

$$[t\log(1+w) - \int \log(1+w)\,dt]\,\frac{d\log(1+w)}{dt} = \sum_{i=2}^{\infty} t^i \sum_{\lambda=1}^{i-1} \frac{\lambda\,(i-\lambda)}{i-\lambda+1}\,a_\lambda\,a_{i-\lambda}$$

ist

$$a_1 = -1; \qquad a_2 = -\frac{1}{2}(m-n)$$

und

26)
$$(i+1)\,a_{i+1} = (m-n)\,i\,a_i + m\,.\,n \sum_{\lambda=1}^{i-1} \frac{\lambda\,(i-\lambda)}{i-\lambda+1}\,a_\lambda\,a_{i-\lambda}$$

für $i \geqq 2$.

Hieraus folgt zunächst, dass a_i für jeden ganzen positiven Werth von i eine ganze homogene Function $(i-1)$ten Grades der beiden Veränderlichen m, n ist. Die Vergleichung der Werthe von a_1 und a_2 mit den für b_1 und b_2 gefundenen Ausdrücken und der Recursionsformel 26) mit Gleichung 17) zeigt ferner, dass diese ganze Function gleich ist der Summe der Glieder höchster Dimension in b_i. Daher erhält man aus Gleichung 22)

27) $$a_i = -\frac{1}{i!}\prod_{\lambda=1}^{i-1}[im - \lambda(m+n)].$$

5.

Indem man die durch die Gleichungen 22) und 27) gegebenen Ausdrücke von b_i und a_i in die Recursionsformeln 17) und 26) einsetzt, erhält man eine Reihe von Formeln, die zum Theil in die Theorie der analytischen Facultäten gehören, und direct auf elementarem Wege schwer zu beweisen sein dürften.

Wir setzen hierbei

$$m = u; \quad m + n = x,$$

also $n = x - u$, und bezeichnen zur Abkürzung die Producte

$$u(u-x)(u-2x)\ldots[u-(i-1)x] \text{ und } u(u+x)(u+2x)\ldots[u+(i-1)x],$$

wo i eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, wie üblich resp. durch

$$(u, -x)^i \text{ und } (u, +x)^i.$$

Man hat dann

$$b_i = -\frac{1}{i!}(iu - x - 1, -x)^{i-1}.$$

Die Einsetzung dieses Werthes in Gleichung 17) ergiebt

$$-\frac{(i+1)((i+1)u - x - 1, -x)^i}{(i+1)!} = -[i(2u - x + 1) - 2]\frac{(iu - x - 1, -x)^{i-1}}{i!}$$

$$+ (u+1)\sum_{\lambda=1}^{i-1}\frac{(i-\lambda)(\lambda x - \lambda u + 1)}{\lambda+1}\cdot\frac{(\lambda u - x - 1, -x)^{\lambda-1}}{\lambda!}\cdot\frac{((i-\lambda)u - x - 1, -x)^{i-\lambda-1}}{(i-\lambda)!}$$

$$-\frac{xi - ui + 2}{2}\sum_{\lambda=1}^{i-1}\frac{(\lambda u - x - 1, -x)^{\lambda-1}}{\lambda!}\cdot\frac{((i-\lambda)u - x - 1, -x)^{i-\lambda-1}}{(i-\lambda)!},$$

oder

$$((i+1)u - x - 1, -x)^i = [i(2u - x + 1) - 2](iu - x - 1, -x)^{i-1}$$

28) $$+ (u+1)\sum_{\lambda=1}^{i-1}\binom{i}{\lambda+1}\cdot(\lambda u - x - 1, -x)^{\lambda}\cdot((i-\lambda)u - x - 1, -x)^{i-\lambda-1}$$

$$+\frac{xi - ui + 2}{2}\cdot\sum_{\lambda=1}^{i-1}\binom{i}{\lambda}\cdot(\lambda u - x - 1, -x)^{\lambda-1}((i-\lambda)u - x - 1, -x)^{i-\lambda-1}.$$

Die Vergleichung der Coefficienten von u^i auf beiden Seiten liefert

$$(i+1)^i = 2\,i^i + \sum_{\lambda=1}^{i-1} \lambda \binom{i}{\lambda+1} \cdot \lambda^{\lambda-1}\,(i-\lambda)^{i-\lambda-1}.$$

Nun ist

$$\lambda\binom{i}{\lambda+1} + (i-\lambda)\binom{i}{i-\lambda+1} = \frac{\lambda\,(i-\lambda)}{\lambda+1}\binom{i}{\lambda} + \frac{(i-\lambda)\,.\,\lambda}{i-\lambda+1}\cdot\binom{i}{\lambda}$$

$$= \frac{i+2}{(\lambda+1)\,(i-\lambda+1)}\cdot\binom{i}{\lambda}\,.\,\lambda\,.\,(i-\lambda).$$

Vertauscht man daher in der vorstehenden Gleichung λ mit $i-\lambda$ und addirt die so entstehende Gleichung zu der vorigen, so ergiebt sich

$$(i+1)^i = 2i^i + \frac{i+2}{2}\cdot\sum_{\lambda=1}^{i-1}\binom{i}{\lambda}\frac{\lambda^\lambda\,(i-\lambda)^{i-\lambda}}{(\lambda+1)(i-\lambda+1)},$$

oder

29) $$(i+1)^{i+1} = 2\,(i+1)\,i^i + \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{i-1}\binom{i+2}{\lambda+1}\lambda^\lambda\,(i-\lambda)^{i-\lambda},$$

also eine Recursionsformel für die Zahlen von der Form λ^λ. Unter Anwendung der oben eingeführten Bezeichnungen ist ferner

$$a_i = -\frac{1}{i!}\,(iu-x,\,-x)^{i-1}.$$

Setzt man diesen Werth in Gleichung 26) ein, so ergiebt sich

30)
$$-\frac{(i+1)\,((i+1)\,u-x,\,-x)^i}{(i+1)!} = -\,(2u-x)\,\frac{i\,(iu-x,\,-x)^{i-1}}{i!}$$
$$+\,u\,(x-u)\sum_{\lambda=1}^{i-1}\frac{\lambda\,(i-\lambda)}{i-\lambda+1}\cdot\frac{(\lambda u-x,-x)^{\lambda-1}}{\lambda!}\cdot\frac{((i-\lambda)\,u-x,\,-x)^{i-\lambda-1}}{(i-\lambda)!}.$$

Indem man diese Gleichung mit u multiplicirt, $x=1$ setzt und die Grösse

$$\frac{(\lambda u,\,-1)^\lambda}{\lambda!},$$

wie üblich, durch $\binom{\lambda u}{\lambda}$ bezeichnet, erhält man eine Recursionsformel für die Grössen von der Form $\binom{\lambda u}{\lambda}$, nämlich

31) $$\binom{(i+1)u}{i+1} = (2u-1)\cdot\binom{iu}{i} + \frac{(u-1)\,(i+2)}{2}\cdot\sum_{\lambda=1}^{i-1}\frac{1}{(\lambda+1)\,(i-\lambda+1)}\cdot\binom{\lambda u}{\lambda}\cdot\binom{(i-\lambda)u}{i-\lambda}.$$

Dieser Gleichnng kann man noch eine andere Form geben durch Einführung der sogenannten Factorielle

$$F\,c\,(u) = u\prod_{\alpha=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}.$$

Man hat nämlich

$$(\lambda u, -1)^{\lambda+1} = \frac{Fc[\lambda\,(u-1)]}{Fc\,[\lambda u+1]} = \lambda u \cdot \frac{Fc[\lambda\,(u-1)]}{Fc\,(\lambda u)},$$

und erhält aus Gleichung 31) nach einigen Transformationen

$$32) \qquad \frac{Fc[(i+1)\,(u-1)]}{Fc[(i+1)\,u]} = (i+1)(2u-1)\,\frac{Fc[i(u-1)]}{Fc\,(iu)}$$
$$+ \frac{u}{2}\sum_{\lambda=1}^{i-1}\binom{i+2}{\lambda+1}\frac{Fc[\lambda\,(u-1)]}{Fc\,(\lambda u)}\cdot\frac{Fc[(i-\lambda)\,(u-1)]}{Fc[(i-\lambda)\,u]}.$$

Nun sei $u = p$, wo p eine ganze positive Zahl > 2 bedeutet. Dann ist

$$\frac{Fc[\lambda(p-1)]}{Fc\,(\lambda p)} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p-1}{p}}\cdot\frac{(p-1)^{-(p-1)\lambda}}{p^{-p\lambda}}\cdot\frac{Fc\left(\lambda+\frac{1}{p-1}\right).Fc\left(\lambda+\frac{2}{p-1}\right)..Fc\left(\lambda+\frac{p-2}{p-1}\right)}{Fc\left(\lambda+\frac{1}{p}\right)Fc\left(\lambda+\frac{2}{p}\right)..Fc\left(\lambda+\frac{p-1}{p}\right)},$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p-1}{p}}\cdot\frac{(p-1)^{-(p-1)\lambda}}{p^{-p\lambda}}\cdot\frac{Fc\left(\frac{1}{p-1}\right).Fc\left(\frac{2}{p-1}\right)..Fc\left(\frac{p-2}{p-1}\right)}{Fc\left(\frac{1}{p}\right).Fc\left(\frac{2}{p}\right)..Fc\left(\frac{p-1}{p}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{1}{p},+1\right)^{\lambda}.\left(\frac{2}{p},+1\right)^{\lambda}..\left(\frac{p-1}{p},+1\right)^{\lambda}}{\left(\frac{1}{p-1},+1\right)^{\lambda}.\left(\frac{2}{p-1},+1\right)^{\lambda}..\left(\frac{p-2}{p-1},+1\right)^{\lambda}}.$$

Ferner ist

$$\frac{Fc\left(\frac{1}{p-1}\right)Fc\left(\frac{2}{p-1}\right)\ldots Fc\left(\frac{p-2}{p-1}\right)}{Fc\left(\frac{1}{p}\right).Fc\left(\frac{2}{p}\right)\ldots Fc\left(\frac{p-1}{p}\right)} = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{p-1}{p}}.$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung 32) ein, so ergiebt sich

$$\frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{p},+1\right)^{i+1}\left(\frac{2}{p},+1\right)^{i+1}\ldots\left(\frac{p-1}{p},+1\right)^{i+1}}{\left(\frac{1}{p-1},+1\right)^{i+1}\left(\frac{2}{p-1},+1\right)^{i+1}\ldots\left(\frac{p-2}{p-1},+1\right)^{i+1}} = (i+1)(2p-1)\,\frac{\left(\frac{1}{p},+1\right)^{i}\left(\frac{2}{p},+1\right)^{i}\ldots\left(\frac{p-1}{p},+1\right)^{i}}{\left(\frac{1}{p-1},+1\right)^{i}\left(\frac{2}{p-1},+1\right)^{i}\ldots\left(\frac{p-2}{p-1},+1\right)^{i}}$$

$$33) \qquad + \frac{p-1}{2}\sum_{\lambda=1}^{i-1}\binom{i+2}{\lambda+1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{p},+1\right)^{\lambda}\cdot\left(\frac{2}{p},+1\right)^{\lambda}\ldots\left(\frac{p-1}{p},+1\right)^{\lambda}}{\left(\frac{1}{p-1},+1\right)^{\lambda}\left(\frac{2}{p-1},+1\right)^{\lambda}\ldots\left(\frac{p-2}{p-1},+1\right)^{\lambda}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{p},+1\right)^{i-\lambda}\left(\frac{2}{p},+1\right)^{i-\lambda}\left(\frac{p-1}{p},+1\right)^{i-\lambda}}{\left(\frac{1}{p-1},+1\right)^{i-\lambda}\left(\frac{2}{p-1},+1\right)^{i-\lambda}\ldots\left(\frac{p-2}{p-1},+1\right)^{i-\lambda}}.$$

Für $u = p = 2$ erhält man auf demselben Wege die Gleichung

$$2^2\left(\frac{1}{2},+1\right)^{i+1} = 3\,(i+1)\left(\frac{1}{2},+1\right)^{i} + \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{i-1}\binom{i+2}{\lambda+1}.\left(\frac{1}{2},+1\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{2},+1\right)^{i-\lambda},$$

welche auch leicht direct verificirt werden kann.

Eine letzte Folgerung, die wir aus den vorangehenden Entwickelungen ziehen, ist folgende: Die Gleichung 4) geht, wenn h eine beliebige von Null verschiedene Grösse bezeichnet, durch die Substitutionen

$$(1 + w) = (1 + w_1)^h; \quad t = ht_1$$

über in

$$(1 + w_1)^{h(m+n)} + h\,(m + n)\,(1 + w_1)^{hn}\,t_1 - 1 = 0.$$

Nun sei

$$1 + w = \varphi\,(t, m, n)$$

die Entwickelung von $1 + w$ nach Potenzen von t. Dann ist

$$1 + w_1 = \varphi\,(t_1, hm, hn)$$

und

$$34) \qquad \left[\varphi\,(t_1, hm, hn)\right]^h = \varphi\,(ht_1, m, n).$$

Setzt man $h = 2$ und vergleicht beiderseits die Coefficienten von t_1^i, so ergiebt sich

$$-2^i \frac{1}{i!}\,(iu - x - 1, -x)^{i-1} = -2\frac{1}{i!}\,(2iu - 2x - 1, -2x)^{i-1}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{i-1} \frac{1}{\lambda!} \cdot \frac{1}{(i-\lambda)!}\,(2\lambda u - 2x - 1, -2x)^{\lambda-1}\,(2(i-\lambda)u - 2x - 1, -2x)^{i-\lambda-1},$$

$$2^i\,(iu - x - 1, -x)^{i-1} = 2\,(2iu - 2x - 1, -2x)^{i-1}$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{i-1} \binom{i}{\lambda}\,(2\lambda u - 2x - 1, -2x)^{\lambda-1}\,(2\,(i-\lambda)\,u - 2x - 1, -2x)^{i-\lambda-1}.$$

Mit Hülfe dieser Formel lässt sich nun Gleichung 28) auch noch weiter umgestalten in

$$\left((i+1)\,u - x - 1, -x\right)^i = i\,(u+1)\,(iu - x - 1, -x)^{i-1} - 2^{i-1}(xi - ui + 2)\left(\frac{ui}{2} - \frac{x}{2} - 1, -\frac{x}{2}\right)^{i-1}$$

$$35) \qquad + (u+1) \sum_{\lambda=1}^{i-1} \binom{i}{\lambda+1}\,(\lambda u - x - 1, -x)^{\lambda}\,((i-\lambda)\,u - x - 1, -x)^{i-\lambda-1}.$$

6.

Wir gehen nun dazu über, den Convergenzbezirk der beiden Reihen

$$1 + w = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i\,t^i = \varphi\,(t)$$

und

$$\log\,(1 + w) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\,t^i = \psi\,(t)$$

zu ermitteln.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass die Grenze der Convergenz für beide dieselbe ist. Offenbar erstreckt sich nämlich die Convergenz der Reihe $\varphi\,(t)$ mindestens eben so weit, wie die der Reihe $\psi\,(t)$. Sie erstreckt sich aber auch nicht weiter. Sei, um dies zu beweisen, t_1 ein beliebiger Punkt innerhalb des Convergenzkreises von $\varphi\,(t)$ und

$$\varphi\,(t) = \varphi\,(t_1) + (t - t_1)\,\mathfrak{P}\,(t - t_1)$$

die aus $\varphi\,(t)$ abgeleitete nach Potenzen von $t - t_1$ fortschreitende Reihe.

Aus der Gleichung

$$(1 + w)^{m+n} + (m + n)(1 + w)^n t - 1 = 0$$

folgt, dass $\varphi(t) = 1 + w$ für keinen endlichen Werth von t verschwinden kann. Also ist auch $\varphi(t_1)$ von Null verschieden, und

$$\psi(t) = \log \varphi(t) = \log \varphi(t_1) + \log\left[1 + \frac{(t - t_1)\,\mathfrak{P}(t - t_1)}{\varphi(t_1)}\right]$$

nach ganzen positiven Potenzen von $t - t_1$ entwickelbar. Es erstreckt sich also auch umgekehrt die Convergenz der Reihe $\psi(t)$ mindestens eben so weit, wie die von $\varphi(t)$, d. h. die Reihen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ haben denselben Convergenzbezirk.

Diejenigen Stellen im Gebiet der beiden Veränderlichen v und t, in welchen die durch die Gleichung

3) $$F(v, t) = v^{m+n} + (m + n)\, v^n t - 1 = 0$$

definirte Function v von t aufhört den Character einer ganzen Function zu besitzen, finden sich durch Auflösung des Systems der beiden Gleichungen

3) $$F(v, t) = 0,$$

36) $$\frac{\partial F(v, t)}{\partial v} = (m + n)\, v^{n-1}(v^m + nt) = 0.$$

Da v für endliche Werthe von t niemals Null wird, so folgt aus der letzten Gleichung, dass an den erwähnten Stellen

$$t = -\frac{v^m}{n}$$

ist. Indem wir dies in die Gleichung 3) einsetzen, ergiebt sich für jene Stellen

$$-\frac{m}{n} v^{m+n} - 1 = 0.$$

Diejenigen endlichen Werthsysteme v, t, welche die beiden Gleichungen 3) und 36) gleichzeitig befriedigen, sind demnach

$$v = \left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}; \quad t = -\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}.$$

Die Manchfaltigkeit dieser Systeme ist durch folgenden Zusatz zu beschränken:

Man erhält nur Werthsysteme v, t, welche die Gleichungen 3) und 36) beide gleichzeitig befriedigen, und man erhält dieselben sämmtlich, indem man $-\frac{n}{m}$ auf die Form $e^{\alpha + i\beta}$ bringt, wo α und β reell sind, der Grösse β successive ihre sämmtlichen möglichen Werthe ertheilt und jedesmal

$$v = e^{\frac{\alpha + i\beta}{m+n}}; \quad t = -\frac{1}{n} e^{\frac{m(\alpha + i\beta)}{m+n}}$$

nimmt. Dagegen bilden die Grössen

$$v = e^{\frac{\alpha + i\beta}{m+n}}; \quad t = -\frac{1}{n} e^{\frac{m(\alpha + i\beta + i2x\pi)}{m+n}},$$

oder

$$t = -\frac{1}{n} e^{\frac{m(\alpha + i\beta + i2x\pi)}{m+n} + im\,2l\pi},$$

wo $\varkappa$ und l beliebige ganze Zahlen bedeuten, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist, im allgemeinen kein Lösungssystem der Gleichungen 3) und 36). Es sei nun v_1, t_1 ein beliebiges Lösungssystem der Gleichungen 3) und 36). Dann sind die Grössen

$$\frac{\partial^2 F(v,t)}{\partial v^2} \text{ und } \frac{\partial F(v,t)}{\partial t}$$

für $v = v_1$, $t = t_1$ beide von Null verschieden. Für $t = t_1$ werden daher von den Wurzeln der Gleichung $F(v,t) = 0$ zwei und nur zwei einander gleich, und diese beiden können durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $(t - t_1)^{\frac{1}{2}}$ fortschreitende Reihe von der Form

$$v - v_1 = (t - t_1)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{P}\left[(t - t_1)^{\frac{1}{2}}\right]$$

dargestellt werden.

Wenn das Verhältniss $\frac{n}{m}$ reell ist, so ist auch

$$\frac{m}{m+n} = \frac{1}{1 + \frac{n}{m}}$$

reell. Die sämmtlichen Werthe der Grösse

$$-\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}$$

sind dann ihrem absoluten Betrage nach einander gleich, und dieser gemeinsame absolute Werth, welcher mit r bezeichnet werden möge, ist der Radius des wahren Convergenzbezirks der Reihe $\varphi(t)$. Zunächst ist nämlich klar, dass der Radius des Convergenzkreises von $\varphi(t)$ mindestens gleich r sein muss. Er kann aber auch nicht grösser sein. Um dies zu beweisen, verstehe man unter t_1 einen beliebigen, aber bestimmten der Werthe von

$$-\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}$$

und lasse t auf dem directen Wege von t_1 bis Null übergehen. Setzt man dann einen der beiden Zweige der Function v, welche im Punkte t_1 zusammentreffen, von t_1 längs dieses Weges fort, so erhält man für $t = o$ eine bestimmte Wurzel der Gleichung

$$v^{m+1} = 1.$$

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$e^{\frac{i2\pi}{m+n}} = \omega.$$

Dann sind sämmtliche Wurzeln der vorstehenden Gleichung ganze Potenzen von ω. Sei $v = \omega^{\varkappa}$, wo $\varkappa$ eine bestimmte, aber nicht näher bekannte ganze Zahl bedeutet, derjenige Werth von v, welchen man durch die angegebene Fortsetzung für $t = 0$ erhält. Da die Gleichung 3) durch die Substitutionen

$$v = \omega^{\varkappa} u; \quad t = \omega^{m\varkappa} \tau$$

in

$$u^{m+n} + (m+n) u^n \tau - 1 = 0$$

übergeht, so ist

$$v = \omega^{\varkappa} \varphi\left(\frac{t}{\omega^{m\varkappa}}\right)$$

die Entwickelung derjenigen Wurzel der Gleichung 3), welche für $t = 0$ den Werth ω^x erwirbt. Diese Wurzel hört aber im Punkte t_1 auf, den Character einer ganzen Function zu besitzen. Der Radius des Convergenzbezirks der Reihe

$$\varphi\left(\frac{t}{\omega^{mx}}\right)$$

ist also höchstens gleich r. Da nun aber ω^{mx} seinem absoluten Betrage nach $= 1$ ist, so kann der Radius des Convergenzbezirks von $\varphi(t)$ ebenfalls nicht $> r$ sein, und ist daher gleich r.

7.

Wenn zweitens das Verhältniss $\frac{n}{m}$ nicht mehr reell ist, so sind die absoluten Beträge der Grössen

$$-\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}$$

sämmtlich von einander verschieden, und es giebt unter ihnen sowohl solche, welche unterhalb jeder beliebig kleinen, als solche, welche oberhalb jeder beliebig grossen vorgegebenen Grenze liegen.

Unter der Voraussetzung, dass das Verhältniss $\frac{m+n}{m}$ seinem absoluten Betrage nach < 1 ist, lassen sich die genauen Convergenzgrenzen der Reihe $\psi(t)$ aus dem Gesetz ermitteln, nach welchem ihre Coefficienten fortschreiten. Wir setzen wieder wie früher

$$m + n = x$$

und haben dann

$$a_i = -\frac{1}{i!}(im - x, -x)^{i-1}.$$

Unter der gemachten Voraussetzung, dass $\frac{x}{m}$ dem absoluten Betrage nach < 1 sei, sind die Grössen a_i sämmtlich von Null verschieden. Der Quotient $\frac{a_i}{a_{i-1}}$ wird also nie unendlich. Man hat

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{(im-x,-x)^{i-1}}{((i-1)m-x,-x)^{i-2}} = \frac{(i-1)(m-x)}{i}\cdot\frac{(im-x,-x)^{i-1}}{((i-1)m-x,-x)^{i-1}}.$$

Nun ist, wenn u, x, x beliebige complexe Grössen und y eine ganz positive Zahl bezeichnen

$$(u+x,+x)^y = (u,+x)^y\left\{1+\frac{y\,.\,x}{u}+\frac{y\,.\,(y-1)\,.\,x\,.\,(x-x)}{1\,.\,2\,.\,u\,.\,(u+x)}\right.$$
$$\left.+\frac{y\,.\,(y-1)\,.\,(y-2)\,.\,x\,.\,(x-x)\,(x-2x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,u\,.\,(u+x)\,(u+2x)}+\cdots\right\},$$

wobei die Reihe in der Klammer so weit fortzusetzen ist, bis sie von selbst abbricht. (Weierstrass „Ueber die Theorie der analytischen Facultäten“ Gleichung (91); Crelle's Journal f. d. M. Bd. 51).

Indem wir hierin

$$\begin{aligned} u &\text{ durch } (i-1)\,m - x,\\ x &\quad - \quad -x,\\ y &\quad - \quad i-1,\\ \varkappa &\quad - \quad m, \end{aligned}$$

ersetzen, wo die rechts stehenden Zeichen ihre bisherige Bedeutung haben, erhalten wir

$$\frac{(im-x,\,-x)^{i-1}}{\big((i-1)m-x,\,-x\big)^{i-1}} = 1 + \frac{(i-1)\,m}{(i-1)\,m-x} + \frac{(i-1)\,(i-2)\,.\,m\,.\,(m+x)}{1\,.\,2\,.\,\big[(i-1)\,m-x\big]\,.\,\big[(i-1)\,m-2x\big]}$$

37)
$$+\frac{(i-1)\,.\,(i-2)\,.\,(i-3)\,.\,m\,.\,(m+x)\,.\,(m+2x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\big[(i-1)\,m-x\big]\,.\,\big[(i-1)\,m-2x\big]\,.\,\big[(i-1)\,m-3x\big]} + \ldots$$

Zur Abkürzung setzen wir, wenn $\varkappa$ eine beliebige ganze positive Zahl $< i$ bezeichnet,

38)
$$c_\varkappa = \frac{(i-1)\,(i-2)\ldots(i-\varkappa)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\varkappa}\cdot\frac{m\,(m+x)\ldots\big[m+(\varkappa-1)\,x\big]}{\big[(i-1)\,m-x\big]\,.\,\big[(i-1)\,m-2x\big]\ldots\big[(i-1)\,m-\varkappa x\big]}$$

und haben dann

39)
$$\frac{c_\varkappa}{c_{\varkappa-1}} = \frac{(i-\varkappa)\,\big[m+(\varkappa-1)\,x\big]}{\varkappa\,\big[(i-1)\,m-\varkappa x\big]}.$$

Nun werde der absolute Betrag von $\frac{x}{m}$ durch ϑ und allgemein der absolute Betrag einer beliebigen complexen Grösse a durch $|a|$ bezeichnet. Dann ist

$$\left|\frac{c_\varkappa}{c_{\varkappa-1}}\right| \leqq \frac{(i-\varkappa)\,\big[1+(\varkappa-1)\,\vartheta\big]}{\varkappa\,\big[(i-1)-\varkappa\vartheta\big]} = \frac{i-\varkappa+i\varkappa\vartheta-\varkappa^2\vartheta-i\vartheta+\varkappa\vartheta}{\varkappa i-\varkappa-\varkappa^2\vartheta}.$$

Sobald nun

$$i > \frac{2\vartheta}{1-\vartheta} \text{ und } \varkappa \geqq 2$$

ist, hat man

$$\varkappa \geqq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} > \frac{1}{1-\frac{1}{i}\frac{\vartheta}{1-\vartheta}} = \frac{i-i\vartheta}{i-i\vartheta-\vartheta}.$$

Da der Nenner der rechten Seite > 0 ist, folgt hieraus

$$\varkappa i - \varkappa i\vartheta - \varkappa\vartheta > i - i\vartheta,$$

oder

$$\varkappa i > i + i\varkappa\vartheta - i\vartheta + \varkappa\vartheta.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{\varkappa+\varkappa^2\vartheta}{\varkappa i} < \frac{\varkappa+\varkappa^2\vartheta}{i+i\varkappa\vartheta-i\vartheta+\varkappa\vartheta},$$

$$1-\frac{\varkappa+\varkappa^2\vartheta}{\varkappa i} > 1-\frac{\varkappa+\varkappa^2\vartheta}{i+i\varkappa\vartheta-i\vartheta+\varkappa\vartheta},$$

oder

$$\frac{\varkappa i-\varkappa-\varkappa^2\vartheta}{\varkappa i} > \frac{i+i\varkappa\vartheta-i\vartheta+\varkappa\vartheta-\varkappa-\varkappa^2\vartheta}{i+i\varkappa\vartheta-i\vartheta+\varkappa\vartheta}.$$

Der Nenner der rechten Seite ist für jeden Werth von x positiv, der Zähler der linken jedenfalls, so lange $x \leqq i-1$ ist, also in allen Fällen, die wir zu betrachten haben. Daher folgt aus der vorstehenden Ungleichung

$$\frac{i+ix\vartheta-i\vartheta+x\vartheta}{xi} > \frac{i+ix\vartheta-i\vartheta+x\vartheta-x-x^2\vartheta}{xi-x-x^2\vartheta},$$

oder

$$\left|\frac{c_x}{c_{x-1}}\right| < \frac{i+ix\vartheta-i\vartheta+x\vartheta}{xi} = \vartheta\left\{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{i}\right\}+\frac{1}{x}$$

$$= \vartheta\left(1+\frac{1}{i}\right)+(1-\vartheta).\frac{1}{x}.$$

Diese letztere Grösse nimmt sowohl mit wachsendem i, als mit wachsendem x beständig ab. Bezeichnet man daher mit J eine beliebige positive Zahl, welche $> \frac{2\vartheta}{1-\vartheta}$ ist, und setzt

$$\vartheta\left(1+\frac{1}{J}\right)+(1-\vartheta).\frac{1}{2}=\varepsilon,$$

so ist

$$\varepsilon < 1$$

und

$$\left|\frac{c_x}{c_{x-1}}\right| < \varepsilon,$$

sobald $i \geqq J$, $x \geqq 2$ ist. Ausserdem ist

$$\left|\frac{(i-1)m}{(i-1)m-x}\right| < \frac{1}{1-\frac{\vartheta}{i-1}} < 2,$$

sobald $i \geqq 3$ ist. Die Glieder der Reihe

$$1+|c_1|+|c_2|+|c_3|+\ldots$$

sind daher, sobald $i > J \geqq 3$ ist, resp. kleiner als die entsprechenden Glieder der unendlichen convergirenden geometrischen Reihe

$$1+2+2\varepsilon+2\varepsilon^2+\ldots$$

Nun sei η eine beliebig kleine vorgegebene positive Grösse und M eine ganze positive Zahl, die so gross gewählt ist, dass

$$2\sum_{\lambda=1}^{\infty}\varepsilon^{M+\lambda} < \eta$$

ist.

Nimmt man nun $i > J$ und gleichzeitig $> M+1$, so ist die Differenz der Reihe auf der rechten Seite der Gleichung 37) und der Summe S ihrer $M+2$ ersten Glieder absolut genommen $< \eta$. Lässt man i über alle Grenzen wachsen, so nähert sich S der Grenze

$$1+\binom{-\frac{m}{x}}{1}\left(-\frac{x}{m}\right)+\binom{-\frac{m}{x}}{2}\left(-\frac{x}{m}\right)^2+\ldots+\binom{-\frac{m}{x}}{M+1}\left(-\frac{x}{m}\right)^{M+1}.$$

Da man nun M von vorn herein beliebig gross annehmen kann, so ergiebt sich

$$\lim_{i=\infty}\left\{\frac{(im-x,-x)^{i-1}}{((i-1)m-x,-x)^{i-1}}\right\}=\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-\frac{m}{x}},$$

wobei unter der mehrdeutigen Potenz auf der rechten Seite der Werth der entsprechenden Binomialreihe zu verstehen ist.

Hieraus folgt

$$40) \qquad \lim_{i=\infty} \frac{a_i}{a_{i-1}} = (m-x)\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-\frac{m}{x}} \text{ für } \left|\frac{x}{m}\right| < 1.$$

Nun bleibt die Grösse a_i einer früheren Bemerkung zu Folge unverändert, wenn man m mit $-n$, n mit $-m$, oder bei unserer gegenwärtigen Bezeichnungsweise m mit $m-x$, x mit $-x$ vertauscht. Daher folgt aus Gleichung 40) sofort, dass der Quotient $\frac{a_i}{a_{i-1}}$ mit unbegrenzt wachsendem i sich auch dann einer endlichen Grenze nähert, wenn zwar nicht $\left|\frac{x}{m}\right|$, wohl aber $\left|\frac{m-x}{x}\right| < 1$ ist.

Diese Grenze ist

$$m\left(1+\frac{x}{m-x}\right)^{\frac{m-x}{x}},$$

wo unter

$$\left(1+\frac{x}{m+x}\right)^{\frac{m-x}{x}}$$

wieder die Binomialreihe zu verstehen ist. — Es ist leicht zu ersehen, dass diese beiden Grenzen übereinstimmen, wenn sowohl $\left|\frac{x}{m}\right|$, als $\left|\frac{x}{m-x}\right| < 1$ ist.

Sobald also wenigstens eine der Grössen $\left|\frac{m+n}{m}\right|$, oder $\left|\frac{m+n}{n}\right| < 1$ ist, ist der Radius r des Convergenzbezirks der Reihe $\psi(t)$

$$r = \left|-\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}\right|,$$

wobei unter

$$-\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}$$

die Entwickelung von

$$-\frac{1}{n}\left(1-\frac{m+n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}, \text{ oder von } \frac{1}{m}\left(1-\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{n}{m+n}}$$

nach dem binomischen Lehrsatz zu verstehen ist.

Die Reihe $\varphi(t)$ hat, wie wir oben gesehen haben, denselben Convergenzbezirk wie die

Reihe $\psi(t)$. Uebrigens kann man auch direct, durch Rechnungen, die den vorstehenden ganz analog sind, nachweisen, dass für $\left|\frac{x}{m}\right| < 1$

$$\lim_{i=\infty} \frac{b_i}{b_{i-1}} = \lim_{i=\infty} \frac{a_i}{a_{i-1}} = (m-x)\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-\frac{m}{x}},$$

resp. für $\left|\frac{x}{m-x}\right| < 1$

$$\lim_{i=\infty} \frac{b_i}{b_{i-1}} = m\left(1+\frac{x}{m-x}\right)^{\frac{m-x}{x}}$$

ist.

8.

Die Binomialreihe für

$$\left(1-\frac{m+n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}$$

liefert bekanntlich den Werth, welchen man erhält, indem man $1-\frac{m+n}{m}$ auf die Form $e^{\alpha+i\beta}$ bringt, für β den zwischen $-\pi$ und π gelegenen Werth auswählt, und dann

$$\left(1-\frac{m+n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}} = e^{(\alpha+i\beta)\frac{m}{m+n}}$$

nimmt. Daher können wir das eben gewonnene Resultat auch so aussprechen:

Der Radius r des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Reihen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ ist gleich dem absoluten Betrage der Grösse

$$-\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}},$$

wobei unter

$$\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}$$

derjenige Werth zu verstehen ist, welchen man erhält, indem man $-\frac{n}{m}$ auf die Form $e^{\alpha+i\beta}$ bringt, für β den der Ungleichung $-\pi < \beta \leqq \pi$ genügenden Werth wählt und dann

$$\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}} = e^{(\alpha+i\beta)\frac{m}{m+n}}$$

setzt.

In dieser Form gilt nun der Satz völlig allgemein, auch wenn $\left|\frac{m+n}{m}\right|$ und $\left|\frac{m+n}{n}\right|$ beide $\geqq 1$ werden. Sind m und n beide reell und positiv, so liefert er wieder das schon früher gewonnene Resultat, dass r dann dem reellen positiven Werthe des Ausdrucks

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}$$

gleich ist.

Wir geben, um die aufgestellte Behauptung zu beweisen, der Grösse $-\frac{n}{m}$ zunächst einen beliebigen complexen Werth, der so beschaffen ist, dass $\left|\frac{m+n}{m}\right| < 1$ wird. Sei

$$-\frac{n}{m} = \varrho e^{i\varphi},$$

wo ϱ und φ reelle von Null verschiedene Grössen bezeichnen, deren erste positiv ist. Da $\frac{m+n}{m}$ nicht reell sein soll, so sind die verschiedenen Werthe des Ausdrucks

$$A = -\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}$$

ihren absoluten Beträgen nach sämmtlich von einander verschieden. Es giebt daher unter ihnen nur einen einzigen, dessen absoluter Betrag der eben erklärten Grösse r gleichkommt, und den wir mit t_1 bezeichnen wollen. Die absoluten Beträge der übrigen sind theils $< r$, theils $> r$. Nun werde mit $\overline{t}$ ein beliebiger der Werthe des Ausdrucks A bezeichnet, welcher absolut genommen $< r$ ist. Dann kann diejenige Wurzel der Gleichung 3), welche für $t = \overline{t}$ durch die convergente Reihe $v = \varphi(\overline{t})$ dargestellt wird, die Gleichung 36) nicht befriedigen, denn sonst könnte sich die Convergenz der Reihe $\varphi(t)$ höchstens bis zum Punkte $\overline{t}$ erstrecken. Wenn wir daher jetzt die unabhängige Variabeln t auf dem directen Wege von 0 bis t_1 übergehen lassen, so kann die durch Gleichung 3) definirte Function v nur auf eine einzige Weise von dem Anfangswerthe 1 aus längs dieses Weges stetig fortgesetzt werden. Der Werth v_1, welchen v so für $t = t_1$ erwirbt, muss die Gleichung 36) befriedigen, weil sich die Convergenz der Reihe $\varphi(t)$, wenn dies nicht der Fall wäre noch über den Kreis mit dem Radius r hinaus erstrecken würde.

Nun denke man sich die Grössen m und n stetig verändert, dann erfahren sämmtliche Werthe des Ausdrucks A ebenfalls stetige Veränderungen, so lange nur m, n und $m+n$ sämmtlich von Null verschieden bleiben. Unter r, t_1, $\overline{t}$ sollen jetzt diejenigen Grössen verstanden werden, welche aus den Werthen, die ursprünglich durch diese Zeichen dargestellt wurden, durch stetige Aenderung hervorgehen. Die verschiedenen Werthe des Ausdrucks A unterscheiden sich von einander durch Factoren von der Form $e^{i2\varkappa\pi\frac{m}{m+n}}$, wobei $\varkappa$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet. So lange $\frac{m}{m+n}$ keiner reellen rationalen Zahl gleich wird, sind daher die Werthe jenes Ausdrucks sämmtlich von einander verschieden, also t_1 und $\overline{t}$ ganz bestimmte Grössen.

Ferner ist

$$e^{i2x\pi\frac{m}{m+n}} = e^{\frac{i2x\pi}{1+\frac{n}{m}}} = e^{\frac{i2x\pi}{1-\varrho\cos\varphi-i\varrho\sin\varphi}}$$
$$= e^{-\frac{\varrho 2x\pi\sin\varphi}{1-2\varrho\cos\varphi+\varrho^2}+i\frac{2x\pi(1-\varrho\cos\varphi)}{1-2\varrho\cos\varphi+\varrho^2}}.$$

So lange daher $\varrho \sin\varphi$ nicht Null wird, sondern dasselbe Zeichen behält, bleiben die verschiedenen Werthe von A absolut genommen $\gtrless r$, je nachdem sie ursprünglich $\gtrless r$ waren.

Hierzu fügen wir endlich folgende Bemerkung:

Giebt man der Grösse t einen beliebigen festen Werth, so sind sämmtliche Wurzeln v der Gleichung 3), als Functionen von m und n betrachtet, stetig, so lange

$$\frac{\partial F(v,t)}{\partial v} = (m+n)\,v^{n-1}\,[v^m + nt]$$

von Null verschieden bleibt.

Hieraus können wir nun folgenden Schluss ziehen:

Wenn m und n stetig so verändert werden, dass erstens m, n und $m+n$ nicht Null werden und dass zweitens $\varrho \sin\varphi$ nicht Null wird, so bleibt stets t_1 der dem Nullpunkt zunächst gelegene Werth des Ausdrucks A, welcher so beschaffen ist, dass v von dem Anfangswerthe 1 für $t=0$ aus über den directen Weg von $t=0$ bis $t=t_1$ fortgesetzt, für $t=t_1$ einen Werth erwirbt, der die Gleichung 36) befriedigt.

Es ist leicht einzusehen, dass man jeden beliebigen complexen Werth von $-\frac{n}{m}$ durch eine stetige Veränderung, welche den obigen Bedingungen gemäss geschieht, aus einem solchen Werth von $-\frac{n}{m}$ ableiten kann, für welchen $\left|\frac{m+n}{m}\right| < 1$ ist. Da ferner t_1 mit dem Werthe des Ausdrucks A übereinstimmt, der in unserem zu beweisenden Satze genauer bezeichnet wurde, so ergiebt sich, dass jener Satz ganz allgemein richtig ist.

9.

Nunmehr sind wir im Stande zu beweisen, dass die gefundene Reihe zur Darstellung sämmtlicher Wurzeln einer beliebigen dreigliedrigen algebraischen Gleichung ausreicht. Wir setzen zur Abkürzung, wenn m und n, wie bisher zwei beliebige von 0 verschiedene Grössen bedeuten, deren Summe auch von Null verschieden ist, und b_i durch Gleichung 22) erklärt wird

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i\,t^i = \varphi(t, m, n).$$

Ferner bezeichnen wir durch m_1 und n_1 zwei beliebige ganze positive Zahlen, durch f und g zwei beliebige von Null verschiedene Grössen, und denken uns die dreigliedrige algebraische Gleichung

42) $$x^{m_1+n_1} + f\,x^{n_1} - g = 0$$

vorgelegt.

Aus den sub 1) ausgeführten Rechnungen und den Untersuchungen über die Bedeutung und den Convergenzbezirk der Reihe $\varphi(t, m, n)$ folgt, dass, wenn $g^{\frac{1}{m_1+n_1}}$ einen beliebigen der möglichen Werthe und $g^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}}$ die $-m_1$te Potenz dieses Werthes bedeutet, eine Wurzel der Gleichung 42) durch die Reihe

$$g^{\frac{1}{m_1+n_1}}\,\varphi\left(\frac{1}{m_1+n_1}\,f\,g^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}},\ m_1,\ n_1\right)$$

dargestellt wird, vorausgesetzt, dass

$$\left|\frac{1}{m_1+n_1}\,f\,g^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}}\right| < m_1^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}}\cdot n_1^{-\frac{n_1}{m_1+n_1}},$$

oder

$$43)\qquad \left|f\,g^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}}\right| < (m_1+n_1)\,m_1^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}}\cdot n_1^{-\frac{n_1}{m_1+n_1}}$$

ist. Hierbei, so wie überall im Folgenden soll unter einer Potenz einer positiven Grösse mit reellem nicht ganzzahligem Exponenten stets der reelle positive Werth verstanden werden. Wir wollen zunächst annehmen, die Ungleichung 43) sei erfüllt. Dann folgt weiter aus den letzten sub 6) angestellten Betrachtungen, dass, wenn

$$\omega = \varepsilon^{\frac{i2\pi}{m_1+n_1}}$$

gesetzt wird, die übrigen Wurzeln der Gleichung 42) durch die Reihen

$$A)\qquad \omega^{\varkappa}\,g^{\frac{1}{m_1+n_1}}\,\varphi\left(\frac{\omega^{-m_1\varkappa}}{m_1+n_1}\cdot f\,g^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}},\ m_1,\ n_1\right);\quad (\varkappa = 1, 2 \ldots m_1+n_1-1)$$

dargestellt werden.

Wir haben somit das Resultat, dass, wenn f und g die Ungleichung 43) erfüllen, sämmtliche Wurzeln der Gleichung 42) mit Hülfe der Reihe $\varphi(t, m_1, n_1)$ dargestellt werden können.

Wenn zweitens

$$44)\qquad \left|f\,g^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}}\right| > (m_1+n_1)\,m_1^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}}\cdot n_1^{-\frac{n_1}{m_1+n_1}}$$

ist, so geben wir der Gleichung 42) durch Division mit f die Form

$$x^{n_1} + \frac{1}{f}\,x^{m_1+n_1} - \frac{g}{f} = 0.$$

Bezeichnet nun $\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{1}{n_1}}$ einen beliebigen der möglichen Werthe, und $\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}$ die $m_1$te Potenz desselben, so kann die vorstehende Gleichung durch die Substitutionen

$$x = \left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{1}{n_1}}\cdot v;\quad \frac{1}{n_1}\cdot\frac{1}{f}\cdot\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{m_1}{n_1}} = t$$

auf die Form gebracht werden

$$v^{n_1} + n_1\,t\,v^{m_1+n_1} - 1 = 0.$$

Hieraus folgt, dass n_1 Wurzeln der Gleichung 42) durch die Reihen

$$B) \qquad \omega_1^{\varkappa} \cdot \left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{1}{n_1}} \cdot \varphi\left(\frac{\omega_1^{m_1 \varkappa}}{n_1} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, -m_1, m_1 + n_1\right)$$

$$(\varkappa = 0, 1, 2 \ldots n_1 - 1)$$

dargestellt werden, wobei zur Abkürzung

$$\omega_1 = e^{\frac{i2\pi}{n}}$$

gesetzt wurde.

Die Bedingung, dass diese Reihen convergiren, ist

$$\left|\frac{1}{n_1} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}\right| < (m_1 + n_1)^{-\frac{m_1+n_1}{n_1}} \cdot m_1^{\frac{m_1}{n_1}},$$

oder

$$\left|f^{-\frac{m_1+n_1}{n_1}} g^{\frac{m_1}{n_1}}\right| < n_1 (m_1 + n_1)^{-\frac{m_1+n_1}{n_1}} \cdot m_1^{\frac{m_1}{n_1}},$$

oder

$$\left|f\, g^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}}\right| > (m_1 + n_1)\, m^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}} \cdot n_1^{-\frac{n_1}{m_1+n_1}},$$

d. h. genau die Ungleichung 44).

Um die Darstellungen der übrigen m_1 Wurzeln der Gleichung 42) zu erhalten, geben wir derselben die Form

$$x^{m_1} - g\, x^{-n_1} + f = 0$$

und finden auf genau demselben Wege wie bisher, dass, wenn

$$\omega_2 = e^{\frac{i2\pi}{m_1}}$$

gesetzt wird, die Reihen

$$C) \qquad \omega_2^{\varkappa} (-f)^{\frac{1}{m_1}} \varphi\left(-\frac{\omega_2^{-n_1 \varkappa}}{m_1} g\, (-f)^{-\frac{m_1+n_1}{m_1}}, m_1 + n_1, -n_1\right); \; (\varkappa = 0, 1 \ldots m_1 - 1),$$

wo für $(-f)^{\frac{1}{m_1}}$ willkürlich einer der möglichen Werthe gewählt werden kann, und $(-f)^{-\frac{m_1+n_1}{m_1}}$ gleich der $-(m_1+n_1)$ten Potenz dieses Werthes zu setzen ist, diejenigen m_1 Wurzeln der Gleichung 45) darstellen, welche durch die vorigen Reihen nicht dargestellt werden konnten, weil sie zugleich mit f unendlich gross werden, resp. mit unbegrenzt abnehmendem g sich nicht der Grenze Null, sondern von Null verschiedenen Grenzen nähern.

Die Bedingung der Convergenz unserer Reihen ist im gegenwärtigen Falle

$$\left|gf^{-\frac{m_1+n_1}{m_1}}\right| < m_1 \cdot n_1^{\frac{n_1}{m_1}} (m_1+n_1)^{-\frac{m_1+n_1}{m_1}},$$

oder

$$\left|f g^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}}\right| > (m_1 + n_1) \cdot m_1^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}} \cdot n_1^{-\frac{n_1}{m_1+n_1}},$$

also wieder die Ungleichung 44).

Da die Reihen A) B) C) auch noch am ganzen Rande ihres Convergenzbezirkes, wenn

45) $$\left| f g^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}} \right| = (m_1 + n_1) \cdot m_1^{-\frac{m_1}{m_1+n_1}} \cdot n_1^{-\frac{n_1}{m_1+n_1}}$$

ist, unbedingt convergiren, wie in dem folgenden Abschnitt bewiesen werden soll, so sind wir zu dem Ausspruch berechtigt, dass

jede Wurzel einer beliebigen dreigliedrigen algebraischen Gleichung mit Hülfe der Reihe $\varphi(t, m, n)$ dargestellt werden kann.

Die Formel 34) zeigt dann weiter, dass auch für jede Potenz einer Wurzel, eine solche Darstellung möglich ist.

10.

Um die Convergenz der Reihen A), B) und C) am Rande ihres Convergenzbezirkes nachzuweisen, gehen wir wieder aus von der Reihe

$$\log \varphi(t, m, n) = \psi(t, m, n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i,$$

wo a_i durch Gleichung 27) definirt ist, und beweisen folgenden allgemeinen Lehrsatz:

Wenn das Verhältniss $\frac{n}{m}$ reell und von 0 und -1 verschieden ist, so convergirt die Reihe $\psi(t, m, n)$ unbedingt für jeden Werth von t, der auf der Grenze ihres Convergenzbezirkes gelegen ist.

Wie früher setzen wir zur Abkürzung

$$m + n = x,$$

und nehmen zunächst an, x und m seien beide reelle positive Zahlen und $x < m$. Unter dieser Voraussetzung wird, wenn man für t einen beliebigen auf der Grenze des Convergenzbezirks der Reihe $\psi(t, m, n)$ gelegenen Werth in diese letztere einsetzt, der absolute Betrag des $i$ten Gliedes

$$\left| a_i t^i \right| = A_i = \frac{1}{i!} (im - x, -x)^{i-1} \cdot \frac{1}{(m-x)^i} \cdot \left(\frac{m-x}{m}\right)^{i\frac{m}{x}}.$$

Aus Gleichung 40) folgt, dass der Quotient $\frac{A_{i+1}}{A_i}$ sich mit unbegrenzt wachsendem i unbegrenzt der Einheit nähert. Um die Convergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ zu beweisen, müssen wir daher nach bekannten Regeln $\frac{A_{i+1}}{A_i}$ auf die Form bringen

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = 1 - \frac{\alpha}{i},$$

und beweisen, dass α für alle Werthe von i oberhalb einer gewissen Grenze grösser ist, als eine positive die Einheit übersteigende Constante α_1.

Nun ist

$$\alpha = i\left(1 - \frac{A_{i+1}}{A_i}\right) = i\left\{1 - \frac{((i+1)\,m - x,\, -x)^i}{(i+1)\,(im - x,\, -x)^{i-1}\,(m-x)} \cdot \left(\frac{m-x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right\}$$

$$46) \qquad = i\left\{1 - \frac{i}{i+1}\,\frac{((i+1)\,m - x,\, -x)^i}{(im - x,\, -x)^i} \cdot \left(\frac{m-x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right\}.$$

Indem wir in Gleichung 37) i mit $i+1$ vertauschen, erhalten wir

$$\frac{((i+1)\,m - x,\, -x)^i}{(im - x,\, -x)^i} = 1 + \frac{im}{im - x} + \frac{i\,(i-1)\,m\,.\,(m+x)}{1\,.\,2\,.\,(im-x)\,(im-2x)} + \ldots.$$

Diese Reihe vergleichen wir mit der folgenden:

$$\left(1 - \frac{x}{m}\right)^{-\frac{m}{x}} = 1 + 1 + \frac{\frac{m}{x}+1}{1\,.\,2} \cdot \frac{x}{m} + \frac{\left(\frac{m}{x}+1\right)\left(\frac{m}{x}+2\right)}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \ldots.$$

Wir setzen zur Abkürzung, wenn $\varkappa$ eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$u_\varkappa = \frac{i\,(i-1)\ldots(i-\varkappa+1)\,.\,m\,(m+x)\ldots(m+(\varkappa-1)\,x)}{1\,.\,2\ldots\varkappa\,.\,(im-x)\,.\,(im-2x)\ldots(im-\varkappa x)},$$

$$v_1 = 1; \quad v_\varkappa = \frac{\left(\frac{m}{x}+1\right).\left(\frac{m}{x}+2\right)\ldots\left(\frac{m}{x}+\varkappa-1\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{m}\right)^{\varkappa-1}$$

und haben dann

$$\frac{u_\varkappa}{u_{\varkappa-1}} = \frac{(i-\varkappa+1)\,.\,[m+(\varkappa-1)\,x]}{\varkappa\,(im-\varkappa x)}; \quad \frac{v_\varkappa}{v_{\varkappa-1}} = \frac{\frac{m}{x}+\varkappa-1}{\varkappa} \cdot \frac{x}{m}.$$

Sobald $\varkappa$ eine gewisse Grenze überschreitet, ist

$$\frac{u_\varkappa}{u_{\varkappa-1}} < \frac{v_\varkappa}{v_{\varkappa-1}},$$

denn damit dies der Fall sei, ist nur erforderlich, dass

$$\frac{(i-\varkappa+1)\,[m+(\varkappa-1)\,x]}{im-\varkappa x} < \frac{m+(\varkappa-1)\,x}{m},$$

oder

$$\frac{i-\varkappa+1}{im-\varkappa x} < \frac{1}{m}$$

sei. Vorausgesetzt, dass $\varkappa < i$ ist, können wir aber statt dieser Bedingung auch folgende setzen:

$$mi - m\varkappa + m < im - \varkappa x,$$

oder

$$-m\varkappa + m < -\varkappa x,$$

oder

$$\varkappa > \frac{m}{m-x}.$$

Wir betrachten nun bloss solche Werthe von i, welche grösser als $\frac{m}{m-x}$ sind, und bezeichnen mit l eine beliebige ganze positive Zahl, welche die Ungleichungen

$$\frac{m}{m-x} < l < i$$

erfüllt. Dann ist

$$\frac{((i+1)m-x,-x)^i}{(im-x,-x)^i} < 1+u_1+u_2+\ldots+u_{l-1}+u_l\left\{1+\frac{v_{l+1}}{v_l}+\frac{v_{l+1}}{v_l}\cdot\frac{v_{l+2}}{v_{l+1}}+\ldots\right\},$$

$$< 1+u_1+u_2+\ldots+u_{l-1}+\frac{u_l}{v_l}\left\{v_l+v_{l+1}+v_{l+2}+\ldots\right\},$$

47) $$< 1+u_1+u_2+\ldots+u_{l-1}+\frac{u_l}{v_l}\left\{\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-\frac{m}{x}}-1-v_1-v_2-\ldots-v_{l-1}\right\}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung kann nach fallenden Potenzen von i entwickelt werden. Man hat nämlich

$$u_\varkappa=\frac{1}{\varkappa!}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{2}{i}\right)\ldots\left(1-\frac{\varkappa-1}{i}\right)\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1+\frac{2x}{m}\right)\ldots\left(1+\frac{(\varkappa-1)x}{m}\right)}{\left(1-\frac{x}{im}\right)\left(1-\frac{2x}{im}\right)\ldots\left(1-\frac{\varkappa x}{im}\right)},$$

$$=\frac{\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1+\frac{2x}{m}\right)\ldots\left(1+\frac{(\varkappa-1)x}{m}\right)}{\varkappa!}\left\{1-\frac{\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa-1)}{i}+\ldots\right\}\left\{1+\frac{x}{im}+\ldots\right\}\left\{1+\frac{2x}{im}+\ldots\right\}\ldots\left\{1+\frac{\varkappa x}{im}+\ldots\right\}$$

$$=v_\varkappa\left\{1-\frac{\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa-1)}{i}+\ldots\right\}\cdot\left\{1+\frac{x}{m}\cdot\frac{\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa+1)}{i}+\ldots\right\}$$

$$=v_\varkappa\left\{1-\frac{\varkappa}{2i}\left[\varkappa-1-\frac{x}{m}(\varkappa+1)\right]+\ldots\right\}$$

und für $\varkappa=l$

$$\frac{u_l}{v_l}=1-\frac{1}{i}\cdot\frac{l}{2}\left[l-1-\frac{x}{m}(l+1)\right]+\ldots.$$

Indem wir diese Werthe in die Ungleichung 47) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{((i+1)m-x,-x)^i}{(im-x,-x)^i} < \left(1-\frac{x}{m}\right)^{-\frac{m}{x}}$$

$$-\frac{1}{i}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{l-1}\varkappa\left[\varkappa-1-\frac{x}{m}(\varkappa+1)\right]v_\varkappa+\frac{l}{2}\left[l-1-\frac{x}{m}(l+1)\right]\cdot\left[\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-\frac{m}{x}}-1-v_1-\ldots-v_{l-1}\right]\right\}$$

$$+\ldots.,$$

und durch Vergleichung dieser Ungleichung mit Gleichung 46) ergiebt sich

48) $$\alpha > 1+\left(\frac{m-x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{l-1}\varkappa\left[\varkappa-1-\frac{x}{m}(\varkappa+1)\right]v_\varkappa\right.$$

$$\left.+\frac{l}{2}\left[l-1-\frac{x}{m}(l+1)\right]\cdot\left[\left(\frac{m-x}{m}\right)^{-\frac{m}{x}}-1-v_1-v_2-\ldots-v_{l-1}\right]\right\}+\frac{1}{i}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{i}\right).$$

Nun ist

$$\sum_{x=1}^{l-1} x\left[x-1-\frac{x}{m}(x+1)\right]v_x = \sum_{x=1}^{l-2}(x+1)\,.\,x\,v_{x+1} - \frac{x}{m}\sum_{x=1}^{l-1}(x+1)\,.\,x\,.\,v_x$$

$$= -\frac{x}{m}\,l\,(l-1)\,v_{l-1} + \sum_{x=1}^{l-2}(x+1)\,.\,x\left(v_{x+1} - \frac{x}{m}\,v_x\right)$$

$$= -\frac{x}{m}\,l\,(l-1)\,v_{l-1} + \sum_{x=1}^{l-2}(x+1)\,.\,x\,.\,v_x\,.\,\frac{x}{m}\left(\frac{\frac{m}{x}+x}{x+1}-1\right)$$

$$= -\frac{x}{m}\,l\,(l-1)\,v_{l-1} + \frac{m-x}{m}\sum_{x=1}^{l-2} x\,v_x\,.$$

Mit unbegrenzt wachsendem l nähert sich $\frac{x}{m}\,l\,(l-1)\,v_{l-1}$ der Grenze Null, denn

$$\frac{\frac{x}{m}(l+1)\,l\,v_l}{\frac{x}{m}\,l(l-1)\,v_{l-1}} = \frac{l+1}{l-1}\cdot\frac{\frac{m}{x}+l-1}{l}\cdot\frac{x}{m}$$

ist < 1, sobald l eine gewisse Grenze überschreitet.

Ferner ist $l-1-\frac{x}{m}(l+1)$ positiv, sobald

$$l > \frac{m+x}{m-x}$$

ist. Da endlich

$$\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-\frac{m}{x}} - 1 = v_1 + v_2 + \ldots + v_{l-1}$$

für jeden Werth von l positiv ist, und

$$\frac{m-x}{m}\sum_{x=1}^{l-1} x\,v_x$$

ebenfalls positiv ist und mit l beständig wächst, so kann man es durch passende Wahl von l immer erreichen, dass die rechte Seite der Ungleichung 48) für jeden oberhalb einer gewissen Grenze gelegenen Werth von i grösser wird, als eine Constante α_1, die selbst wieder > 1 ist. Somit ist die Convergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ bewiesen für den Fall, dass m und x reelle positive Grössen, und $x < m$ ist. Da nun A_i unverändert bleibt, wenn man m mit $m-x$, x mit $-x$ vertauscht, so ergiebt sich hieraus sofort, dass die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ ebenfalls convergirt, wenn $-x$ und $m-x$ positive Zahlen sind, und $-x < m-x$ ist, oder mit anderen Worten, wenn x eine beliebige negative, m eine beliebige positive Grösse ist.

Wir setzen nun zweitens voraus, x und m seien reelle positive Zahlen, aber $x > m$. In diesem Falle muss der Convergenzbeweis der betrachteten Reihe anders geführt werden*). Wir geben zunächst dem Coefficienten a_i eine geeignete Form: Man hat

$$a_i = -\frac{1}{i!}(im - x, -x)^{i-1} = -\frac{1}{i!}\frac{Fc\left(\frac{im}{x} - i + 1\right)}{Fc\left(\frac{im}{x}\right)} \cdot x^{i-1}$$

$$= \frac{1}{i!} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{x^i}{x-m} \cdot \frac{Fc\left(-i\frac{x-m}{x}\right)}{Fc\left(\frac{im}{x}\right)}$$

$$= -\frac{x^{i-1}}{i!} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(i\frac{x-m}{x}\right) \cdot \frac{1}{Fc\left(\frac{im}{x}\right) \cdot Fc\left(i\frac{x-m}{x}\right)}.$$

Der Radius des Convergenzbezirks der Reihe $\psi(t, m, n)$ ist in unserem Falle

$$m^{-\frac{m}{x}}(x-m)^{-\frac{x-m}{x}}.$$

Daher wird die unbedingte Convergenz der Reihe $\psi(t, m, n)$ am Rande ihres Convergenzbezirks bewiesen sein, wenn gezeigt ist, dass die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}\, m^{-i\frac{m}{x}}(x-m)^{-i\frac{x-m}{x}}}{i!\, Fc\left(\frac{im}{x}\right) Fc\left(i\frac{x-m}{x}\right)}$$

unbedingt convergirt.

Wir bezeichnen zur Abkürzung das $i$te Glied dieser Reihe durch B_i. Dann ist

$$49) \qquad \frac{B_{i+1}}{B_i} = \frac{Fc\left(\frac{im}{x}\right) \cdot Fc\left(i\frac{x-m}{x}\right)}{(i+1)\, Fc\left(\frac{(i+1)m}{x}\right) Fc\left((i+1)\frac{x-m}{x}\right)} \cdot \left(\frac{m}{x}\right)^{-\frac{m}{x}} \cdot \left(\frac{x-m}{x}\right)^{-\frac{x-m}{x}}.$$

Setzt man nun in der Gleichung

$$\frac{1}{Fc(u)} = (u-1)^{u-\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, e^{-u+1}\, e^{\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{1}{(u+\varkappa)^{\lambda+1}}},$$

welche für jeden positiven Werth von u gilt, an Stelle von u successive die Grössen

$$\frac{im}{x},\quad i\frac{x-m}{x},\quad \frac{(i+1)m}{x},\quad (i+1)\frac{x-m}{x}$$

*) Vgl. die Anmerkung am Schlusse.

und setzt dann die so erhaltenen Werthe der entsprechenden Functionen Fc in Gleichung 49) ein, so ergiebt sich

$$\frac{B_{i+1}}{B_i} = \frac{\left(\frac{(i+1)m}{x}-1\right)^{\frac{(i+1)m}{x}-\frac{1}{2}} \left((i+1)\frac{x-m}{x}-1\right)^{(i+1)\frac{x-m}{x}-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{im}{x}-1\right)^{\frac{im}{x}-\frac{1}{2}} \left(i\frac{x-m}{x}-1\right)^{i\frac{x-m}{x}-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left(\frac{m}{x}\right)^{-\frac{m}{x}} \left(\frac{x-m}{x}\right)^{-\frac{x-m}{x}}}{e\,(i+1)}\, e^{-S},$$

wo S eine Grösse bedeutet, die für jeden positiven Werth von i positiv ist.

Also ist

$$\frac{B_{i+1}}{B_i} < \left(\frac{(i+1)m}{x}-1\right)^{\frac{m}{x}} \cdot \left((i+1)\frac{x-m}{x}-1\right)^{\frac{x-m}{x}} \cdot \left(\frac{(i+1)m-x}{im-x}\right)^{\frac{im}{x}-\frac{1}{2}} \left(\frac{(i+1)(x-m)-x}{i(x-m)-x}\right)^{i\frac{x-m}{x}-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{m}{x}\right)^{-\frac{m}{x}} \left(\frac{x-m}{x}\right)^{-\frac{x-m}{x}}}{e\,(i+1)}$$

$$< \left(1-\frac{x}{(i+1)m}\right)^{\frac{m}{x}} \left(1-\frac{x}{(i+1)(x-m)}\right)^{\frac{x-m}{x}} \left(1+\frac{m}{im-x}\right)^{\frac{im}{x}-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{x-m}{i(x-m)-x}\right)^{i\frac{x-m}{x}-\frac{1}{2}} \cdot e^{-1}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung lässt sich für hinlänglich grosse Werthe von i in eine convergente Potenzreihe von $\frac{1}{i}$ entwickeln.

Man findet so

$$\frac{B_{i+1}}{B_i} < 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{i} + \ldots$$

und kann hieraus nach einer bekannten Regel die Convergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} B_i$ schliessen.

Die Reihe $\psi(t, m, n)$ convergirt also am Rande ihres Convergenzbezirks unbedingt, sobald m und n reelle Grössen sind, und $\frac{n}{m}$ von 0 und -1 verschieden ist. Man übersieht leicht, dass hieraus ihre Convergenz auch für den Fall folgt, dass m und n zwar complex, ihr Verhältniss aber reell ist. Der ausgesprochene Satz ist somit in seinem vollen Umfang bewiesen.

Einer früheren Bemerkung zu Folge ist, wenn $\psi(t, m, n)$ unbedingt convergirt, auch die Reihe $\varphi(t, m, n)$ unbedingt convergent. Daher ist die unbedingte Convergenz der Reihen A), B), C) für den Fall, dass die Gleichung 45) besteht, eine unmittelbare Eolge des eben erwiesenen Satzes.

Da die Reihen A), B), C) an der Grenze ihres Convergenzbezirks selbstverständlich nicht schneller convergiren können, als irgend eine gegebene convergente geometrische Reihe, so sehen wir jetzt auch die in der Einleitung angeführte Gauss'sche Bemerkung bestätigt, dass die Convergenz der Reihen, welche die Wurzeln einer dreigliedrigen algebraischen Gleichung ausdrücken, an den Stellen, wo diese zwei gleiche Wurzeln besitzt, zwar noch vorhanden, aber schwächer ist, als bei irgend welcher fallenden geometrischen Progression.

Anmerkung.

Erst nach Vollendung der vorliegenden Arbeit erfuhr ich, dass das Thema derselben schon früher mehrfach behandelt worden sei. Die vollständige Litteratur darüber, so weit sie mir bis jetzt bekannt geworden, ist folgende:

In den Acta Helvetica, Vol. III, 1757. pag. 154 u. ff. hat Lambert gezeigt, dass jede dreigliedrige algebraische Gleichung auf die Form gebracht werden kann

$$x^m + px = q,$$

und für eine Wurzel dieser Gleichung eine unendliche Reihe angegeben, welche aus den in der vorliegenden Dissertation entwickelten durch einfache Substitutionen hervorgeht. Der Beweis, dass diese Reihe wirklich eine Wurzel der gegebenen Gleichung darstellt, ist nur angedeutet. Die Bedingung ihrer Convergenz ist richtig angegeben, aber ohne Beweis.

Ein zweites Mal hat Lambert dieselbe Reihe nebst einigen ähnlichen, in einer Abhandlung mit dem Titel „Observations analytiques" (Nouveaux mémoires de l'académie de Berlin, année 1770 pag. 225) wiedergegeben. Den früher angedeuteten Beweis hat er auch hier nicht ausgeführt, sondern dafür einen anderen gegeben, der jedoch deshalb nicht einwurfsfrei ist, weil die Convergenz der vorkommenden Reihen nicht nachgewiesen wird.

Euler hat dann die von Lambert gefundenen Reihen in einer Schrift „Observationes circa radices aequationum" (Novi Commentarii academiae Petropolitanae Tom. XV. 1770 pag. 51) aus einem allerdings nur mangelhaft bewiesenen allgemeinen Satze abgeleitet, und auch für die Wurzeln einer viergliedrigen Gleichung ähnliche Entwickelungen gegeben. Ferner hat er in einer Arbeit „De Serie Lambertina plurimisque ejus insignibus proprietatibus" (Acta academiae Petropolitanae 1779, pars post. pag. 29) die Lambert'sche Reihe ausführlicher behandelt und unter anderem auch die Entwickelung ihres Logarithmus gegeben.

Ferner verdanke ich der Güte des Herrn Prof. Stern in Göttingen die Mittheilung, dass das Problem in neuerer Zeit von J. G. Westphal in einer von der Göttinger philos. Facultät gekrönten Preisschrift vom Jahre 1850 „Evolutio radicum aequationum algebraicarum e ternis terminis constantium in series infinitas" behandelt worden ist. Herr Westphal giebt daselbst die Darstellung sämmtlicher Wurzeln der Gleichung

$$x^{m+n} + fx^n - g = 0$$

durch unendliche Reihen für den Fall, dass m, n, ganze positive Zahlen und f und g reelle Grössen sind, und stellt für jede Reihe die genauen Bedingungen ihrer Convergenz fest. Das Studium dieser Abhandlung hat mich veranlasst, in § 10 dem zweiten Theil des Beweises für die Convergenz der betrachteten Reihen am Rande ihres Convergenzbezirks noch nachträglich eine andere Gestalt zu geben.

Endlich hat Herr Dr. Adelbert Gebhardt in einer Programm-Abhandlung des Nicolaigymnasiums zu Leipzig vom Jahre 1873 gezeigt, wie die Reihen zur numerischen Berechnung der Wurzeln benutzt werden können.

Wesentlich neu sind somit in der gegenwärtigen Dissertation nur die Ausdehnung der Betrachtungen auf den allgemeinsten Fall, wo m, n, f, g beliebige complexe Zahlen sind, und die recursorische Entwickelung der Coefficienten, und die aus der Vergleichung dieser mit der independenten gewonnenen Formeln.

THESEN.

1. Der Gebrauch der Function

$$Fc(u) = u \prod_{\alpha=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha} \right) \right\}$$

ist unter allen Umständen dem der Functionen $\Gamma(u)$ und $\Pi(u)$ vorzuziehen.

2. Zur Lösung der Probleme, welche die Physik der Mathematik darbietet, reicht das Studium der analytischen Functionen aus.

3. Der Zweck der mathematischen Physik ist nicht, die Naturerscheinungen zu erklären, sondern nur Methoden anzugeben, mittelst deren ihr Verlauf im voraus berechnet werden kann.

VITA.

Ego, Hans Carl Friedrich v. Mangoldt, die XVIII m. Maii anni MDCCCLIV patre Hans v. Mangoldt, matre Luisa, e gente von Lengerke, Wimariae natus sum. Fidei addictus sum evangelicae. Primis litterarum elementis Gottingiae imbutus puer fere novem annorum Friburgii Badensis Lyceum adii, quod per sex annos et semestre frequentavi. Post mortem patris, pia memoria per vitam colendi, cum familia Dresdam profectus gymnasium Vitzthumianum tres per annos frequentavi. Anno MDCCCLXXII maturitatis testimonio instructus vere ineunte Helvetiam petivi et in urbe Neuchâtel per semestre aestivum versatus sum. Ibi in academia legentes audivi viros ill. Boucher, Hirsch, Kopp, Sacc, Terrier. Autumno ejusdem anni Dresdam reversus per annum sequentem miles voluntarius fui. Deinde primum Gottingiae per quinque semestria legentes audivi viros ill. Brugsch, Ehlers, Enneper, Fuchs, Klinkerfues, Lotze, Riecke, Schering, Stern, Voss, Weber, tum Berolini quatuor per semestria a viris ill. G. Kirchhoff, Kronecker, Kummer, Wangerin, Weierstrass institutus sum; seminarii mathematici per quatuor semestria fui sodalis. Quibus viris omnibus maxime de me meritis, inprimis ill. Weierstrass, summas, quas possum, gratias ago semperque habebo.